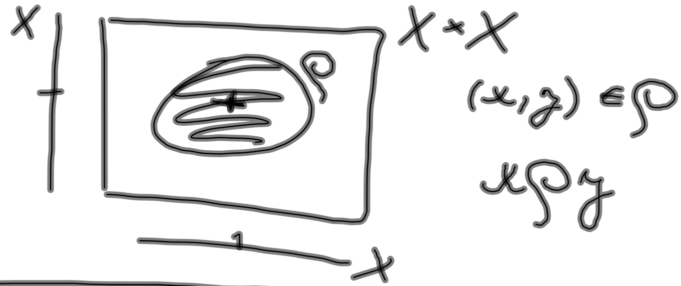
USPOŘÁDÁNÍ A SVAZY

X množina

relace na množině X je lib. podmnožina množiny $X \times X$.

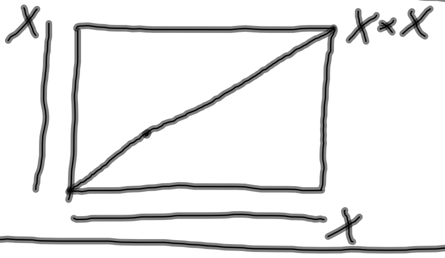


Relace ρ na množině X se nazývá

- REFLEXIVNÍ, jestliže $\forall x \in X$ platí $x \rho x$
- ANTISYMETRICKÁ, jestliže $\forall x,y \in X$ platí $x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y$
- TRANZITIVNÍ, jestliže $\forall x,y,z \in X$ platí $x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z$.

Reflexivní, antisymetrická, tranzitivní relace se nazývá USPOŘÁDÁNÍ. $(\leq)$

$\boxed{x \leq y \wedge x \neq y \Rightarrow x < y}$



id $\quad x = y$

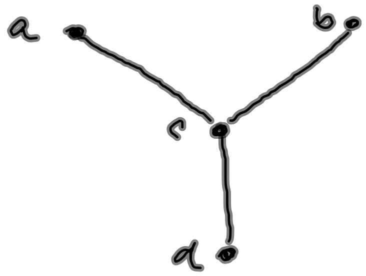
X, $\mathcal{P}(X)$ množina všech podmnožin množiny X.

$\subseteq$ je uspořádání na množině $\mathcal{P}(X)$.

$\mathbb{N}$, $|$ $\quad a | b$ ... a dělí b

DÚ ověřit, že $(\mathbb{N}, |)$ je uspořádaná množina.

Prvky x, y se nazývají SROVNATELNÉ, jestliže $x \le y$ nebo $y \le x$.
Uspořádaná množina se nazývá ŘETĚZEC, jestliže každé dva prvky jsou srovnatelné.



$d \le c$ – -
$\le a$
$\le b$
$\le d$

X uspořádaná množina, $Y \subseteq X$, $x \in Y$

x je
- NEJMENŠÍ prvek množiny Y, jestliže $\forall y \in Y$ platí $x \le y$.
- NEJVĚTŠÍ prvek Y, jestliže $\forall y \in Y$ platí $y \le x$.
- MINIMÁLNÍ prvek Y, jestliže v Y neexistuje y tak, že $y < x$.
- MAXIMÁLNÍ prvek Y, jestliže v Y neexistuje y takové, že $x < y$.

X usp. množina, $Y \subseteq X$

$x \in X$ je – DOLNÍ ZÁVORA mn. Y, když $\forall y \in Y$ platí $x \leq y$.

– HORNÍ ZÁVORA mn. Y, když $\forall y \in Y$ platí $y \leq x$.

– INFIMUM mn. Y, když je největší prvek množiny dolních závor. ($\inf Y = x$)

– SUPREMUM mn. Y, když je nejmenší horní závora ($\sup Y = x$)

$(X, \leq_X)$, $(Y, \leq_Y)$ usp. množiny.

$f : X \longrightarrow Y$ se nazývá IZOTONNÍ, jestliže $\forall\, x_1, x_2 \in X$ platí

$$x_1 \leq_X x_2 \implies f(x_1) \leq_Y f(x_2).$$

Pokud f je bijekce a f i f^{-1} jsou izotonní, potom f se nazývá IZOMORFISMUS uspořádaných množin.

$$id_{\mathbb{N}} : (\mathbb{N}, \mid) \longrightarrow (\mathbb{N}, \leq)$$

$$n \mid m \implies \exists\, k \in \mathbb{N} : n \cdot k = m \implies$$

$$n \leq m.$$

$$id_{\mathbb{N}} : (\mathbb{N}, \leq) \longrightarrow (\mathbb{N}, \mid)$$

$$n \leq m \not\Longrightarrow n \mid m.$$

$(X, \leq)$ uspořádaná množina.
Když pro lib. $x, y \in X$ existuje
$\sup\{x,y\}$ i $\inf\{x,y\}$, říkáme,
že X je SVAZOVĚ USPOŘÁDANÁ.

Tvrzení $(M, \leq)$ je svazově uspořádaná množina.

označení: $\sup\{x,y\} =: x \vee y$
$\inf\{x,y\} =: x \wedge y$

Pak platí

$x \vee x = x$
$x \vee y = y \vee x$
$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
$x \vee (y \wedge x) = x$ $\qquad (*)$

$x \wedge x = x$
$x \wedge y = y \wedge x$
$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
$x \wedge (y \vee x) = x$

$\forall\, x, y, z \in M$.

Důkaz DÚ

Alg. struktura $(M, \wedge, \vee)$ se dvěma bin. operacemi $\wedge$ a $\vee$, které splňují podmínky $(*)$, se nazývá SVAZ. Operace $\wedge$ se nazývá PRŮSEK, operace $\vee$ se nazývá SPOJENÍ.

$(M, \wedge, \vee)$ ... svaz.

- $x \leq_\wedge y \iff x \wedge y = x$

  Pak $\leq_\wedge$ je uspořádání na M.

- $x \leq_\vee y \iff x \vee y = y$.

  Pak $\leq_\vee$ je uspořádání na M.

<u>Tvrzení</u> L ... svaz, $x, a, b \in L$

1) Když $a \leq b$, pak $a \wedge x \leq b \wedge x$.
2) Když $a \leq b$, pak $a \vee x \leq b \vee x$.
3) Když $x \leq a$, $x \leq b$, pak $x \leq a \wedge b$.
4) Když $x \geq a$, $x \geq b$, pak $x \geq a \vee b$.

<u>Důkaz</u> 1) $a \leq b \Rightarrow a \wedge b = a$

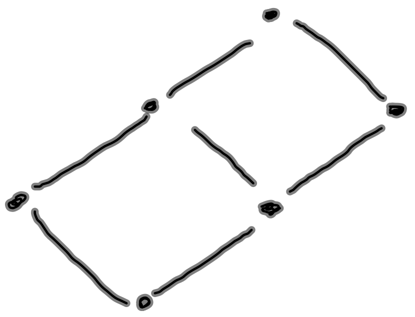
$(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) = (a \wedge b) \wedge x = a \wedge x$.

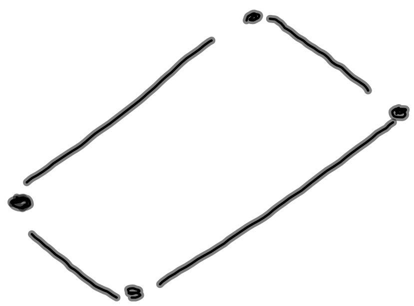
$\Rightarrow a \wedge x \leq b \wedge x$.

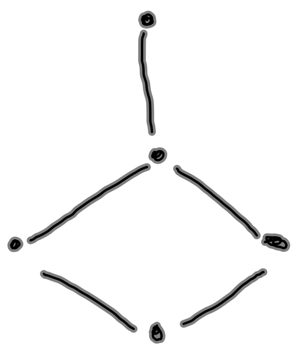
Další DÚ.

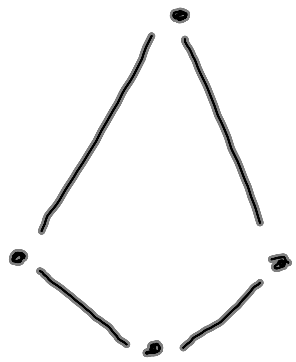
$(M, \wedge, \vee)$ ... svaz, $A \subseteq M$

A je PODSVAZ svazu M, jestliže $\forall\, x, y \in A$ platí $x \wedge y \in A$ a zároveň $x \vee y \in A$.









$(X,\wedge,\vee)$, $(Y,\wedge,\vee)$ ... svazy

$f: X \to Y$ se nazývá HOMOMORFISMUS svazů, jestliže

$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$

$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$

$\forall a, b \in X$.

Tvrzení Každý homomorfismus svazů je izotonní zobrazení.

Důkaz $(X,\wedge,\vee)$, $(Y,\wedge,\vee)$ svazy.

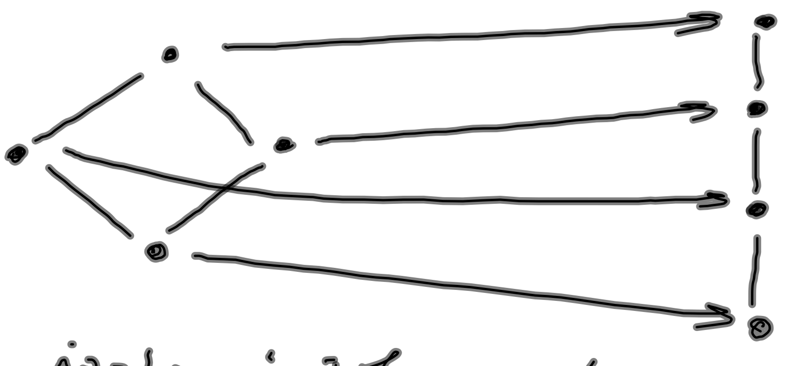
$f: X \to Y$ homomorfismus svazů.

$a, b \in X$, $a \leq b$. $\Rightarrow a \wedge b = a$

$f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b) = f(a)$

$\Rightarrow f(a) \leq f(b)$

$\Rightarrow f$ je izotonní.



izotonní zobrazení není homomorfismus svazů.

Svaz X se nazývá ÚPLNÝ, jestliže každá jeho podmnožina má supremum i infimum.

$(\mathbb{N}, \leq)$ není úplný svaz.

$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ je úplný svaz.

Tvrzení L uspořádaná množina, jejíž každá podmnožina má infimum. Pak L je úplný svaz.

Důkaz $X \subseteq L$, buď Y množina všech horních závor množiny X, $s = \inf Y$.

$x \in X$, $\forall y \in Y$ platí $x \leq y$

$\Rightarrow x$ je dolní závora množiny Y.

$\Rightarrow x \leq s \Rightarrow s$ je horní závora X

$\Rightarrow s \in Y$

$s = \inf Y \Rightarrow s$ je nejmenší horní závora mn. $X \Rightarrow s = \sup X$.